

ISSN 1516-8840

Dezembro, 2011

*Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária
Embrapa Clima Temperado
Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento*

Documento 339

Otimização da Alimentação Bovina através de Programação Linear

Sérgio Junichi Idehara
Ruben Cassel Rodrigues

Embrapa Clima Temperado
Pelotas, RS
2011

Exemplares desta publicação podem ser adquiridos na:

Embrapa Clima Temperado
BR 392 Km 78
Caixa Postal 403, CEP 96010-971- Pelotas, RS
Fone: (53) 3275-8199
Fax: (53) 3275-8219 – 3275-8221
Home Page: www.cpact.embrapa.br
e-mail: sac@cpact.embrapa.br

Comitê Local de Publicações

Presidente: Ariano Martins de Magalhães Júnior
Secretária - Executiva: Joseane Mary Lopes Garcia
Membros: Márcia Vizzotto, Ana Paula Schneid Afonso, Giovani Theisen, Luis Antônio
Suíta de Castro, Flávio Luiz Carpena Carvalho, Christiane Rodrigues Congro, Regina das
Graças Vasconcelos dos Santos.
Suplentes: Isabel Helena Verneti Azambuja e Beatriz Marti Emygdio.

Supervisão editorial: Antônio Luiz Oliveira Heberlê
Revisão de texto: Ana Luiza Barragana Viegas
Normalização bibliográfica: Fábio Lima Cordeiro
Editoração eletrônica: Juliane Nachtigall (estagiária)
Fotos da capa: Sérgio Junichi Idehara

1ª edição

1ª impressão (2011): 50 exemplares

Todos os direitos reservados

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação
dos direitos autorais (Lei N° 9.610).

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Embrapa Clima Temperado

Idehara, Sérgio Junichi.

Otimização da alimentação bovina através de programação linear / Sérgio Junichi
Idehara e Ruben Cassel Rodrigues. – Pelotas: Embrapa Clima Temperado, 2011.

... p. -- (Embrapa Clima Temperado. Documentos,).

ISSN 1516-8840

Bovino – Nutrição animal – Otimização linear – Modelagem matemática – Pesquisa
operacional – Ruminante – Dieta. I. Rodrigues, Ruben Cassel. II. Título. III. Série

CDD 636.20852

© Embrapa 2010

Autores

Sérgio Junichi Idehara

Engenheiro mecânico, D.Sc., Pesquisador da
Embrapa Clima Temperado,
Pelotas, RS,
sergio.idehara@cpact.embrapa.br

Ruben Cassel Rodrigues

Zootecnista, M.Sc., Pesquisador da
Embrapa Clima Temperado,
Pelotas, RS,
cassel.rodrigues@cpact.embrapa.br

Apresentação

Esta publicação busca explorar as metodologias desenvolvidas na área da pesquisa operacional e aplicadas à alimentação de animais, voltadas principalmente aos ruminantes.

Esses métodos, em conjunto com uma base de dados proveniente do Laboratório de Bromatologia da Embrapa Clima Temperado, possibilitam um balanço nutricional ideal e com o menor custo possível, uma vez que essa condição é, atualmente, indispensável para a sustentabilidade da produção.

O conteúdo desse documento é recomendado aos profissionais da área agrícola (nível superior), pesquisadores e produtores que buscam a melhoria dos sistemas de produção. Contudo, a implantação e uso dos métodos dependem fortemente de pessoas qualificadas em Informática e Matemática.

Clênio Nailto Pillon
Chefe Geral
Embrapa Clima Temperado

Sumário

Introdução.....	09
Nutrição animal.....	12
Composição químico-bromatológica.....	15
Interpretação da programação linear.....	22
Modelagem da dieta animal.....	29
Aplicação da Otimização através da PO.....	32
Resultado Numérico.....	37
Conclusão.....	43
Referências.....	45

Otimização da Alimentação Bovina através de Programação Linear

Sérgio Junichi Idehara

Ruben Cassel Rodrigues

Introdução

Quando se trata da alimentação animal para a produção bovina, é usual o manejo pela pastagem. Mas nas diversas regiões brasileiras, onde se produz o gado de corte ou de leite, a disponibilidade das forrageiras está atrelada às condições climáticas locais. Em determinadas épocas do ano, por exemplo, de estiagem no inverno do Mato Grosso do Sul (LISITA et al., 2009) ou no outono do Rio Grande do Sul (MARQUES; COUTO, 2010), a quantidade e a qualidade da forragem decrescem significativamente, ao ponto de comprometer a produção de carne ou de leite.

Para diminuir os efeitos da perda de qualidade da pastagem, uma das saídas empregadas no campo é a utilização de uma alimentação suplementar, como os concentrados comerciais, silagem ou feno e grãos, que muitas vezes elevam o custo do produto final. Em particular, as soluções que envolvem a ensilagem (silagem) e fenação (feno), que em geral apresentam custos adicionais para a obtenção por requerer o plantio – muitas vezes com a

correção do solo – e a colheita, podem ser, então, inviáveis a um produtor de pequeno porte. Em alguns casos, a adoção de uma formulação composta de volumosos (pastagem, silagem e feno) e concentrados pode contribuir para encontrar um “meio termo” entre o preço pago e a qualidade do alimento – valor nutricional balanceado – e, portanto, manter a produtividade do rebanho, mesmo nas situações mais críticas. Ainda como uma alternativa, nos dias de hoje, existe um interesse cada vez maior de utilizar coprodutos ou resíduos industriais que possam ser empregados para a alimentação animal e, em geral, são encontrados a um menor valor do que os outros alimentos. Exemplificando, Pereira et al. (2009) chamam a atenção para essa possibilidade pelo potencial nutritivo dos coprodutos da indústria de sucos, que funciona como um suplemento alimentar e melhora os índices de produtividade animal.

A fim de responder a este tipo de pergunta é que ferramentas matemáticas, como da pesquisa operacional, vêm sendo desenvolvidas nas últimas décadas. A pesquisa operacional trata de modelos matemáticos aplicados na tomada de decisão para otimizar o uso de recursos disponíveis que, especificamente para esse caso, é o problema da alimentação de animais. O método possibilita que as exigências nutricionais das diferentes categorias de animais sejam supridas, mas buscando-se a minimização do custo deste manejo, situação essa que, nos dias de hoje, torna-se cada vez mais vital para qualquer produtor. Contudo, a otimização das variáveis nutricionais e do custo do alimento podem não ser suficientes para lidar com o hábito alimentar bovino, uma vez que existem diversas outras características do comportamento animal

que, muitas vezes, não estão descritas no modelo matemático. Conforme é ressaltado em Soares et al. (2009), o alimento oferecido está limitado ao consumo voluntário, isto é, determinadas substâncias na dieta animal podem influenciar a quantidade em que o alimento é consumido, tornando importante a escolha dos produtos para não prejudicá-lo. Essa variável poderia ser incluída no modelo, sobretudo quando nas opções de alimentos tiver a presença de produtos com alto teor de fibra e lignina.

Assim, o objetivo da otimização descrita neste trabalho é, a partir de dados de ordem químico-bromatológica dos alimentos e tendo disponível uma diversidade de diferentes tipos de produtos para consumo, identificar quais alimentos e em qual quantidade deverão ser utilizados para uma formulação nutricional balanceada de menor custo possível e que possibilite o maior aproveitamento pelos bovinos. O modelo matemático aplicado é linear, baseado no algoritmo de Karmarkar.

Nutrição Animal



Fotos: Sérgio Junichi Idehara

Figura 1: Ilustração – soja, azevém, silagem de milho e resteva do arroz

Na produção animal, a nutrição é um dos itens mais considerados no gerenciamento do rebanho, pois uma alimentação inadequada provoca uma série de problemas relacionadas à saúde e queda de produtividade, como:

- o menor ganho de peso do gado de corte e;
- a redução da produção de leite na pecuária leiteira;

sendo que, neste último, ainda pode propiciar perdas na qualidade do leite pelo surgimento do “leite instável não ácido” (LINA) e com o risco de não poder comercializá-lo.

Entretanto, ainda que se conheça a importância de ter uma alimentação balanceada, existem grandes dificuldades em certas

situações, como nos casos em que a disponibilidade de alimentos fica restrita, fato corrente em determinadas regiões do país, onde se emprega o sistema de manejo por pastoreio, vulnerável à sazonalidade das forrageiras. Essa questão, como apresentada anteriormente, é superada pelo uso de volumosos estocados e em conjunto com os concentrados, de modo a equilibrar as necessidades nutricionais do animal. É claro que essa prática envolve custos adicionais para o produtor e, portanto, uma análise estratégica é requerida para a viabilização da produção, algumas vezes chamada de “análise bioeconômica” (ESTEVES, 1997).

No contexto atual, diversas alternativas de menor custo têm sido discutidas, como o uso da resteva e rebrote do arroz irrigado para melhorar o ganho de peso bovino no Rio Grande do Sul (MARQUES; COUTO, 2011), ou de diferentes culturas para fazer silagem, como a de girassol (TOMICH, 2004), que fornece maiores teores de proteína e minerais do que os grãos de milho e sorgo. Além disso, há uma busca pelo aproveitamento de plantas locais, com potencial para servir de alimento aos ruminantes, como no estudo de Lisita et al. (2009), no qual espécies arbóreas nativas e outras introduzidas, no Mato Grosso do Sul, são usadas para a fenação em áreas de assentamento.

Dentre as outras possibilidades de alimentos, com valores nutricionais diferenciados, estão aqueles provenientes dos coprodutos e resíduos industriais. Como a matéria-prima dessas agroindústrias depende das culturas locais, pode-se encontrar diferentes subprodutos nas diferentes regiões brasileiras. Além

do menor custo e de ser uma fonte secundária de rentabilidade para as empresas produtoras, a disponibilidade em alta quantidade nos períodos de safra possibilita o seu uso na alimentação diária dos bovinos, garantindo uma vantagem em relação aos outros produtos, embora inconstante devido à sazonalidade. Seguindo esta tendência, várias universidades, instituições de pesquisa e as próprias indústrias estudam a possibilidade do uso dos subprodutos na alimentação de animais.

Para citar um exemplo, Messias et al. (2006) indicam que a casca de soja juntamente com a silagem de folhas de capim-elefante poderia ser usada para aumentar o valor proteico do alimento em localidades próximas a Corumbá/MS, onde existem empresas processadoras de soja, e promovendo a substituição (parcial) do milho. Em outra análise, Oishi et al. (2011) ilustram o uso de uma série de subprodutos da indústria alimentícia japonesa para formular uma ração animal de baixo custo e que minimize o impacto ambiental, pela diminuição da quantidade de nitrogênio e fósforo do excremento, mas que contenha todos os componentes nutricionais necessários ao desenvolvimento de um gado de corte. Eles utilizam a pesquisa operacional para selecionar e determinar as quantidades ideais de cada um desses produtos, para que a ração obedeça a esses critérios.

Este tipo de estudo exemplifica a potencialidade dos métodos de otimização, mas que são empregáveis a outros problemas, como na definição de formulações nutricionais a partir de uma lista de produtos, de modo a ponderar a composição nutricional do

alimento e custo (aquisição ou produção, transporte, estocagem e processamento), conforme requisitos definidos ao desenvolvimento e saúde do rebanho, tolerância às substâncias presentes na dieta, influência no comportamento bovino, impacto ambiental, etc. Ou seja, os modelos matemáticos podem envolver inúmeros aspectos da nutrição, considerando restrições colocadas, por exemplo, pelos zootecnistas e veterinários.

Composição químico-bromatológica

É conhecido que cada tipo de alimento, como aqueles citados no tópico anterior, apresenta uma característica nutricional diferente; saber quais são elas e suas quantidades é primordial para a formulação das dietas balanceadas. A composição dos alimentos pode ser determinada via laboratório de bromatologia, cujos resultados são, muitas vezes, divulgados em artigos técnicos da área ou disponibilizados em bancos de dados, como no Nutrient Databank System (NDBS) da USDA, que contém as características químicas de mais de 230 mil alimentos (HAYTOWITZ et al., 2009), ou em publicações que reúnem tabelas de composição nutricional (ISLABÃO, 1984; NRC, 1996; NRC, 2001; SUVIMAX, 2006). Embora muitos desses dados estejam disponíveis ao público, em geral não contemplam avaliações de produtos locais ou coprodutos industriais, principalmente quando estão voltados para a alimentação de animais. Neste caso seria necessário eventualmente um maior número de análises em laboratório ou obter os dados diretamente da indústria produtora.

Contudo, como uma outra fonte de informações, cada vez mais são disponibilizados trabalhos que apresentam as características químico-bromatológicas de produtos específicos/regionais e orientações quanto à maneira de aplicá-lo como ração animal, para não prejudicar, por exemplo, o nível de fermentação e taxa de passagem no rúmen (TOMICH et al., 2004; PEREIRA et al., 2009; RODRIGUES, 2009; OISHI et al., 2011). Portanto, o uso dessas literaturas permitiria uma maior abrangência na definição dos tipos de alimentos utilizáveis e na obtenção de informações para formular uma dieta saudável.

Exigência nutricional animal



Foto: Sérgio Junichi Idehara

Figura 2: Ilustração de produtor de leite em Capão do Leão/ RS.

Também, é preciso conhecer as necessidades nutricionais do animal em questão, considerando-se parâmetros como o tipo de produção, leiteira ou de corte, além de idade, manejo, raça, peso, sexo, hábito alimentar, etc., que irão definir as quantidades de micro e macronutrientes, matéria seca, energia, entre outros elementos para a manutenção e desenvolvimento do bovino. O conhecimento dos menores valores aceitáveis dessas variáveis é usado para minimizar a sobrealimentação e aumentar a eficiência do uso de nutrientes, algumas vezes, buscando reduzir o excedente daqueles que saem no excremento, para evitar a contaminação do solo e água. Além disso, as formulações nutricionais podem focar um resultado específico como na obtenção, por exemplo, de maiores taxas de ganho de peso, usando alimentos com maior concentração de energia, como carboidratos não estruturais em grãos de milho ou torta de soja.

A determinação destas variáveis envolve uma série de cálculos, baseados em modelos analítico-experimentais, os quais são encontrados e constantemente atualizados em novas edições dos livros: *Nutrient Requirements of Beef Cattle* (NRC, 1996) para bovinos de corte e *Nutrient Requirements of Dairy Cattle* (NRC, 2001) para o gado de leite. As relações matemáticas, apresentadas nessas publicações, podem ser implementadas computacionalmente para prever as necessidades diárias de um animal específico, sob certas condições ambientais. Também, os livros apresentam tabelas simplificadas de requerimento nutricional, como uma forma de guia para um diagnóstico e tratamento mais simples.

Apesar dessas informações nutricionais servirem como referência para a escolha dos alimentos, não bastam para se criar uma dieta saudável, pois existem situações em que se exige limitar, balancear ou fixar a presença de um elemento para garantir o correto aproveitamento do alimento ou a manutenção da saúde do animal. Por exemplo, na necessidade de ter uma relação de proporção entre a quantidade de volumosos e concentrados na alimentação, para evitar problemas de acidificação ou timpanismo no rúmen do bovino. Outras vezes, procura-se limitar a quantidade de determinados alimentos que: (1) contenham elevados níveis de alguma substância prejudicial à digestão quando ingeridos em excesso, como o extrato etéreo encontrado no girassol (TOMICH et al., 2004); ou (2) contenham baixa porcentagem de fibra em detergente neutro e ácido, que reduz o consumo voluntário e a capacidade de absorção de energia (Saun, 2006; Galyean; Abney, 2006).

Assim, a implementação de um modelo matemático, para o cálculo da dieta de bovinos, requer uma cuidadosa avaliação das proporções e composições químicas dos alimentos, limitando ou impondo a presença de determinadas substâncias quando necessárias à saúde do animal.

Método de programação linear

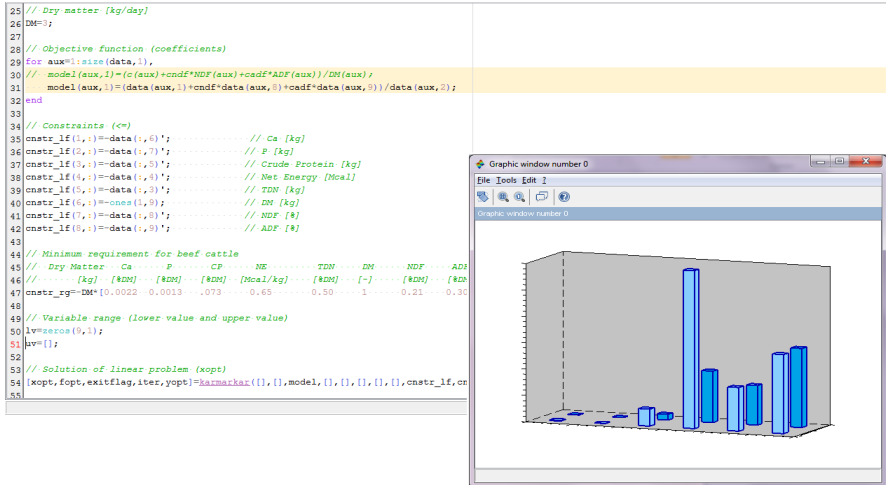


Figura 3: Ilustração da programação em linguagem Scilab.

A pesquisa operacional (PO) é um estudo interdisciplinar entre a Matemática e outras ciências como a Computação, Física, Engenharia, etc., que envolve o gerenciamento das atividades humanas, procurando, por exemplo, maximizar o rendimento (lucro) ou minimizar as despesas (custos) dos processos. Sua origem histórica vem de pesquisas realizadas desde o século XVIII, por estudiosos como J.L. Lagrange, J. Fourier, John von Neumann, entre outros. No entanto, sua real aplicação ocorreu somente no século XX, influenciada, principalmente, pela utilização dos computadores.

Dentro da PO, a programação linear é uma das técnicas de solução mais utilizadas para a otimização quando o modelo matemático é linear. Um dos primeiros trabalhos foi desenvolvido por George

B. Dantzig, por volta de 1947, para resolver os problemas de transporte da força aérea americana. Esse método computacional, denominado de Simplex, foi apresentado à comunidade acadêmica em 1951 no Activity Analysis of Production and Allocation (KOOPMANS, 1951). Depois disso, tornou-se uma das técnicas mais empregadas e bem aceitas por diversas áreas, chegando à administração, agricultura, produção industrial, planejamento, logística, organização empresarial, entre outras.

Embora fosse um método de solução inovador para a época, ainda havia algumas dificuldades, como o tempo de processamento computacional e quantidade de memória requerida, que aumentava drasticamente conforme se elevava o número de variáveis. Além disso, os problemas eram limitados às incógnitas não negativas. Para superá-las, inúmeras variações do algoritmo inicial e novas formulações, por estruturas mais eficientes computacionalmente, foram sugeridas nos anos seguintes, como o método afim de I.I. Dikin (DIKIN, 1967) e o método dos elipsoides do matemático russo L. G. Khachian (KHACHIAN, 1979).

Mas, dentre eles, pode-se destacar o método de Karmarkar de 1984 apresentado no encontro de ORSA/ TIMS em Dallas/ EUA (KARMARKAR, 1984; SCHRIJVER, 1985) e divulgado na primeira página do jornal New York Times, em 19 de Novembro do mesmo ano (TODD, 2001). Este método havia se revelado altamente eficiente para a questão de tempo computacional, pois a sua complexidade aumenta como uma função polinomial, diferente do método Simplex que, nos casos mais críticos, perde-se nas

iterações de forma cíclica durante a busca pela solução.

O método de Karmarkar (DANTZIG; THAPA, 1997) é um algoritmo de ponto-interior, que procura os valores ótimos da função objetiva a partir do domínio das possíveis soluções do problema, ao contrário do método Simplex, que varre os planos de contorno em busca da solução – método externo. Assim, se um problema tem muitos hiperplanos na vizinhança do ponto ótimo, o método de Karmarkar, provavelmente, encontraria mais rapidamente a solução. Contudo, na situação de um baixo número de planos no contorno, o método Simplex chegaria na resposta em menos iterações.

Atualmente, os softwares comerciais trabalham baseados nesses algoritmos, mas com variações na forma de implementação, ou mesmo através de métodos híbridos para minimizar essas dificuldades de tempo e memória computacional gastos, além da falta de convergência. Essa metodologia é mais fácil de utilizar e mais robusta para os usuários, porém necessita de cuidados na entrada de dados e interpretação dos resultados finais – “como seria esperado ao lidar com um programa de modelagem computacional”.

Na área nutricional, a PO tem sido usada há vários anos para o balanceamento da dieta, seguindo recomendações de nutricionistas para o planejamento da dieta humana em que se requer a combinação de diversos grupos alimentares com diferentes quantidades de energia, palatabilidade e frequência de consumo.

Muitas vezes funcionam como ferramentas de suporte para a adequação nutricional de setores da sociedade com deficiência na alimentação, como ilustrado por Ferguson et al. (2004) na montagem da dieta para crianças da zona rural, usando produtos locais, como farinha de milho, peixe, manga e abóbora, ou em aplicações para determinar tipos e proporções de compostos, por exemplo, de óleo vegetal para uma dieta saudável – balanço na quantidade de vitamina E e ácido graxo – com baixo custo e menor quantidade de ácido graxo saturado (DARMON et al., 2006).

O uso da otimização, como apoio à tomada de decisão pelos zootecnistas, veterinários e agrônomos na formulação de ração animal, envolve a identificação de possíveis alimentos em um banco de dados, definição da dieta e constante atualização do preço dos produtos. Atualmente, essas metodologias envolvem cada vez mais variáveis, cujos modelos matemáticos incorporam parâmetros como o tipo e idade do animal, curva de crescimento e forma de uso do produto final (leite, queijo, carne, etc.). Por isso, a área de otimização ainda conta com inúmeras pesquisas e estudos que muitas vezes extrapolam as considerações lineares e passam a usar modelos não lineares (SAHMAN et al., 2009), otimizados a partir de métodos meta-heurísticos: algoritmo genético, simulated annealing, busca tabu, colônia de formiga, PSO – Particle Swarm Optimization – etc.

Interpretação da programação linear

A modelagem matemática, isto é, a definição de equações (funções objetivas) e inequações (condições de restrição) para

descrever os fenômenos físicos, biológicos e químicos, é o ponto inicial do problema de otimização. Contudo, dependendo do grau de detalhamento que se faz da realidade, o modelo pode ter uma menor ou maior representabilidade do sistema real, ou seja, apresentar estimativas ou previsões com diferentes níveis de erro. O que o define é o tipo de resultado e precisão numérica esperados e, em geral, limitado às possibilidades de processamento, uma vez que quanto mais complexo for o modelo, maior será o tempo e consumo computacional.

A função objetiva representa o lucro ou o custo do sistema para o qual o algoritmo irá maximizar o rendimento ou minimizar os gastos, respectivamente. Essa equação, de modo simplificado, é escrita como uma função linear de somatório de todos os ganhos ou gastos de cada um dos produtos, assim:

$$\text{Função Objetiva} = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + \dots = \sum_i c_i \cdot x_i, \quad (1)$$

em que c_1, c_2, c_3, \dots são os ganhos/ custos por unidade ou peso do produto e x_1, x_2, x_3, \dots representam a quantidade de cada produto.

Além da definição do lucro ou despesa, é necessário incluir no modelo a especificação das quantidades máximas ou mínimas de cada produto. Por exemplo, para o planejamento da alimentação balanceada, é necessário especificar a quantidade mínima de cada elemento nutricional (condições de restrição), e algumas vezes a máxima permitida, escrita na forma de inequações matemáticas.

Assim,

$$Ca_1 \cdot x_1 + Ca_2 \cdot x_2 + Ca_3 \cdot x_3 \geq Ca_{min}$$

$$P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 \geq P_{min} \quad (2)$$

cujos Ca_1 , Ca_2 , Ca_3 ... são as quantidades de cálcio contido nos produtos 1, 2, 3..., respectivamente, e Ca_{min} a quantidade mínima de cálcio requerido na dieta. Analogamente para a variável P, que representa o fósforo necessário ao animal.

A solução deste problema (função custo + restrições), denominada de “solução ótima”, é a resposta para a questão: quais são os tipos e quantidades de alimentos a serem escolhidos na dieta, para atender a uma exigência nutricional com menor custo possível? O processo para determiná-la, neste trabalho, é a programação linear. O problema da otimização pela PO pode ser visualizada geometricamente no plano cartesiano como um conjunto de retas (bidimensional) ou hiperplanos definidos pelas restrições no espaço R^N das variáveis. Quando existir uma solução ótima, a mesma estará sobre uma das intersecções dessas retas ou planos, ou seja, nos vértices da figura geométrica (GIORDANO et al., 2009).

Por exemplo, dada uma função custo a ser minimizada:

$$Custototal = \frac{1}{2} x_1 + x_2, \quad (3)$$

cujas restrições são definidas como:

$$\begin{aligned}x_1 &\geq 3 \text{ e } x_1 \leq 7 \\x_2 &\geq 2 \text{ e } x_2 \leq 7\end{aligned}\tag{4}$$

e x_1 e x_2 são as quantidades dos produtos. O menor valor, da desigualdade da restrição, indica a mínima quantidade requerida, e o maior valor, a máxima quantidade disponível do produto.

Graficamente, os limites delimitados pelas retas das restrições formam a região das possíveis soluções do problema (hachurado na Figura 4), isto é, que atendem às limitações impostas a x_1 e x_2 . Enquanto que os pontos de intersecção das retas (3,2), (3,7), (7,2) e (7,7) – indicados pelos círculos na figura – são os candidatos à solução ótima, que minimizaria o custo total.

Então, sabendo-se isso e de modo simplificado, no método Simplex, a busca da solução ótima é feita nos pontos que estejam sobre as intersecções, isto é, no contorno do problema para reduzir a região de varredura e procurando, de uma iteração à outra, a direção que melhor atenda à função objetiva. No exemplo, significaria testar os pontos de cruzamento das retas para verificar qual delas é o ponto de mínimo (menor custo). Já o algoritmo de Karmarkar desenvolve a busca a partir do interior da figura geométrica (domínio das possíveis soluções), com iterações que convergem para o ponto ótimo e, por isso, chamado de método de ponto-interior (Figura 5).

Computacionalmente, o método de Karmarkar avança, a partir do

ponto inicial, em direção ao ponto ótimo numa série de passos/saltos (steepest descent step), que são realizados a cada iteração do algoritmo. Contudo, deve-se trabalhar com um comprimento do passo para que o ponto nunca caia fora da região possível de soluções, em outras palavras, não saia de dentro do retângulo formado pelas restrições, para o caso deste exemplo.

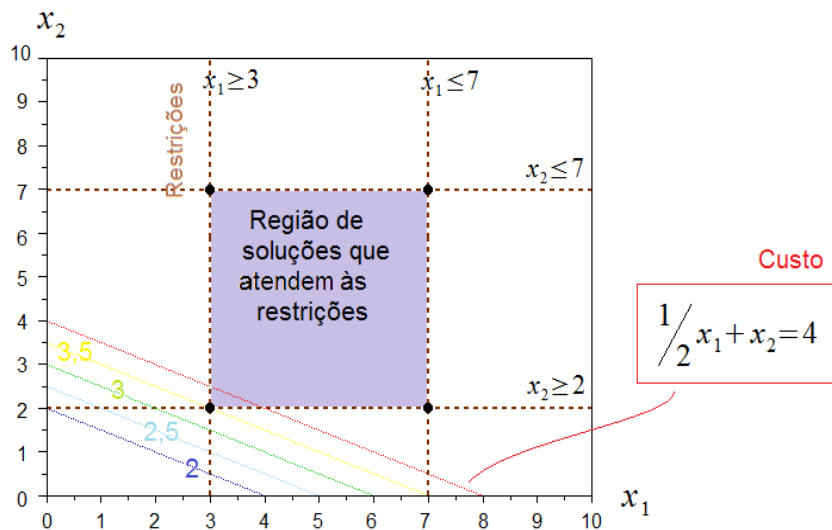


Figura 4: Ilustração geométrica de um problema de PO

Assim, na formulação original, a fim de que a busca permaneça dentro do domínio, utilizam-se transformações matemáticas (projeções) que possibilitam uma mudança do espaço e garanta que o ponto fique no interior da figura geométrica e sempre distante do contorno.

Em resumo, o processo de modelagem e resolução do problema de otimização consiste na definição do sistema de equação(ões) e inequações:

$$\text{Minimizar : } \sum_i c_i \cdot x_i \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a : } & a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \dots \geq b_1 \\ & a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \dots \geq b_2 \\ & \dots = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\text{e } x_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

cujo “a” são as quantidades relativas de nutrientes de cada produto (x_i) e “b” o mínimo valor requisitado na dieta.

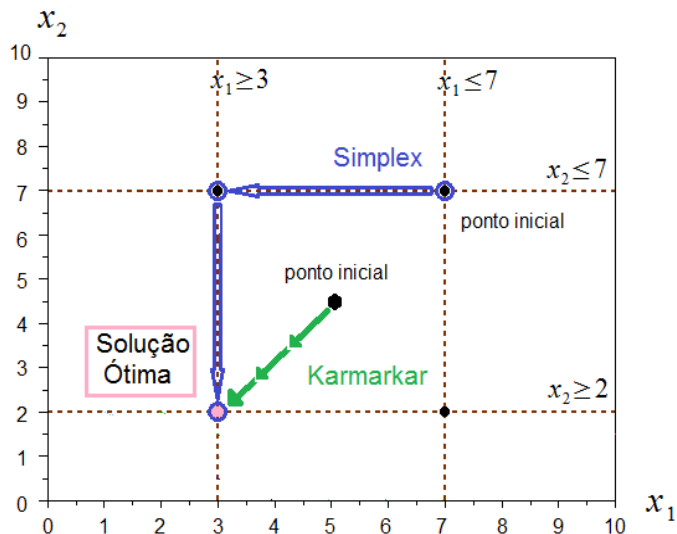


Figura 5: Busca do ponto ótimo pelos métodos Simplex e Karmarkar.

Comercialmente, existem inúmeros softwares disponíveis para determinar a solução do sistema de equações 6, para citar: no Microsoft® Office Excel pelo comando solver, Matlab® da Mathworks pelo toolbox de otimização, Lingo® da Lindo System inc., SAS/ OR® da SAS Institute Inc., entre outros no mercado. Os resultados apresentados neste trabalho foram calculados pelo software livre Scilab (DIGITEO).

Modelagem da dieta animal

Tendo como objetivo, em uma ilustração dessa metodologia, a escolha de produtos alimentícios para o gado de corte com menor gasto e que atenda às suas necessidades diárias, define-se o seguinte modelo matemático de custo:

$$CustoTotal = c_1 \cdot x_1 / MS_1 + c_2 \cdot x_2 / MS_2 + c_3 \cdot x_3 / MS_3 + \dots, \quad (7)$$

cuja razão $\frac{x_i}{MS_i}$ é o peso total (matéria seca + umidade) do produto i , calculado como a quantidade de matéria seca (em kg) dividida pelo seu percentual, e as variáveis “ c ” são os custos de cada produto, em unidades monetárias por kg. Na prática, os custos dos produtos (c_1 , c_2 , c_3 ...) são atualizados conforme a variação do preço de produção ou aquisição no mercado.

As restrições são escritas como limites inferiores e superiores das necessidades nutricionais do animal, que neste caso, consideram-se como condições da otimização da energia metabolizável (EM, Mcal/kg MS), matéria seca (MS, %), proteína bruta (PB, %MS), cálcio (Ca, %MS) e fósforo (P, %MS), adotados numericamente conforme os parâmetros nutricionais indicados no NRC (1996). Assim, essas serão escritas para N fontes de alimentos como:

$Ca_1 \cdot x_1 + Ca_2 \cdot x_2 + \dots + Ca_N \cdot x_N \geq Ca_{min} \cdot MS_{min}$, mínima quantidade, em quilograma, de cálcio na soma de todos os produtos;

$PB_1 \cdot x_1 + PB_2 \cdot x_2 + \dots + PB_N \cdot x_N \geq PB_{min} \cdot \lambda$, mínima quantidade, em quilograma, de fósforo na soma de todos os produtos;

$PB_1 \cdot x_1 + PB_2 \cdot x_2 + \dots + PB_N \cdot x_N \geq PB_{min} \cdot MS_{min}$, mínima quantidade, em quilograma, de proteína bruta na soma de todos os produtos;

$EM_1 \cdot x_1 + EM_2 \cdot x_2 + \dots + EM_N \cdot x_N \geq EM_{min} \cdot MS_{min}$, mínima quantidade, em mega caloria, de energia metabolizável (para manutenção e ganho de peso) na soma de todos os produtos;

$MS_1 \cdot x_1 + MS_2 \cdot x_2 + \dots + MS_N \cdot x_N \geq MS_{min}$, mínima quantidade, em quilograma, de matéria seca na soma de todos os produtos.

(8)

Para garantir que a massa total do alimento (matéria seca + umidade) seja limitada à capacidade de consumo voluntário do animal, inclui-se a seguinte restrição:

$$\frac{x_1}{MS_1} + \frac{x_2}{MS_2} + \dots + \frac{x_N}{MS_N} \leq Massa_{Total}. \quad (9)$$

No qual o valor de $Massa_{Total}$, que é a máxima quantidade consumível de alimento, é dado em quilograma e x_1, x_2, \dots são as quantidades de matéria seca (kg) de cada um dos produtos disponíveis para a alimentação animal, com exceção dos suplementos que estão representados no próprio peso.

Outra característica importante, durante a busca da solução, é indicar no algoritmo a necessidade de balancear uma mínima quantidade de volumoso, que evite problemas digestivos como a acidose, timpanismo ou diarreia. Para isso, como uma das restrições, adiciona-se um limite na proporção entre a somatória das

massa de volumoso e a massa total consumida, que corresponde à mínima porcentagem estabelecida para a manutenção da saúde do animal ($\%Volumoso_{Min}$). Numericamente e de forma a simplificar o equacionamento, define-se nesse modelo um fator de peso, α , para cada alimento da função objetiva, cujo valor será 1, se o alimento for um volumoso, ou igual a zero, em caso contrário. A inequação é escrita conforme indicado a seguir, na razão da somatória de volumoso e massa total:

$$\left(\alpha_1 \cdot \frac{x_1}{MS_1} + \dots + \alpha_N \cdot \frac{x_N}{MS_N} \right) / \frac{\quad}{Massa_{Total}} \geq \%Volumoso_{Min} \quad (10)$$

Essa etapa é requerida porque atender às necessidades nutricionais, de energia, minerais e proteína, não é suficiente para garantir a correta digestão dos produtos.

Aplicação da Otimização através da PO

Como uma ilustração da aplicação do método da programação linear na definição de uma dieta diária de ruminantes, implementa-se o modelo descrito na seção anterior: função objetiva (equação 7) e restrições (equações 8, 9 e 10) no software Scilab, para serem resolvidas pelo método de Karmarkar. A vantagem de utilizar linguagens de programação, para a solução dos problemas, é a abertura para escrever diferentes modelos de acordo com a necessidade do usuário, o que nos programas comerciais seria inacessível, embora isso exija maior conhecimento computacional e de modelagem matemática das pessoas envolvidas.

Assim, para a demonstração numérica da metodologia em uma simulação, utiliza-se como base uma das tabelas simplificadas do NRC (1996) – Tabela 15 – para a formulação da dieta de novilhas de reposição (reproduzido a seguir na Tabela 1). Nesta consideram-se as quantidades de energia metabolizável (EM), proteína bruta (PB), cálcio (Ca) e fósforo (P) necessárias para que um animal, com gordura corporal de 28%, ganhe peso em torno de 1,2 kg/ dia, a partir de 250 kg. A quantidade máxima de matéria seca (MS) e massa natural (matéria seca + umidade) a ser consumida foi fixada, respectivamente, em 2% e 5% do peso inicial do animal.

Esse é um exemplo ilustrativo do uso e interpretação dos resultados obtidos a partir de um problema de PO, e as variáveis adotadas, para a modelagem, foram escolhidas para simplificar o caso. Em uma situação mais complexa, é possível aumentar o número de parâmetros para incluir, por exemplo, outros minerais (sódio, potássio, magnésio, entre outros), vitaminas e carboidratos.

O banco de dados das composições químico-bromatológicas dos possíveis alimentos, deste exemplo, foi gerado baseado nas avaliações realizadas por Rodrigues (2009) e em informações do NRC (1996), indicadas na Tabela 3 e Tabela 4. Os produtos selecionados foram algumas forrageiras de inverno, outros tipos de volumosos como feno e silagem, e grãos; mas se pode entender que a escolha dos alimentos da composição desse banco depende diretamente da sua disponibilidade na região de produção.

Adicionalmente, inclui-se na lista de produtos da otimização alguns suplementos minerais comerciais (Tabela 2), pois em alguns casos podem ser necessários pela baixa concentração de cálcio e/ ou fósforo dos alimentos citados na Tabela 3 e Tabela 4.

Tabela 1: Dados da Tabela 15 do NRC (1996).

Peso	Matéria Seca	EM	PB	Ca	P
[kg]	[kg/dia]	[Mcal/kg]	[% MS]	[% MS]	[% MS]
250,0	5,00	2,74	12,40	0,49	0,24
272,2	5,44	2,74	11,90	0,45	0,23
294,8	5,90	2,74	11,50	0,42	0,21
317,5	6,35	2,74	10,90	0,39	0,20
340,2	6,80	2,74	10,30	0,37	0,19
362,9	7,26	2,74	9,80	0,34	0,18

Fonte: National Research Council. *Nutrient requirements of beef cattle* (1996).

Tabela 2: Composição de suplementos minerais disponíveis no mercado.

Produto	Custo [\$ /kg]	Ca [g/kg]	P [g/kg]
Suplemento 1	2,667	200	60
Suplemento 2	1,600	196	131
Suplemento 3	1,344	110	40

Fonte: Catálogos e orçamentos de empresas comerciais, junho/2011.

A variável preço na otimização tem um papel preponderante, já que a minimização do custo depende diretamente dela. Assim, a exatidão da informação irá influenciar no sucesso do processo de otimização. Os preços dos produtos, aqui representados como unidades monetárias por quilograma (\$/kg), estão referenciados aos valores comerciais de aquisição deste ano. Entretanto, como variam conforme a região e período de procura, principalmente entre as forrageiras (azevém, aveia preta, cornichão e trevo branco), nestas adotou-se um número constante para representar o seu valor de produção: \$0,020/kg, baseado nos dados de Factori et al. (2011).

O custo dos outros produtos foi correlacionado aos valores de venda de fornecedores ou à cotação de corretora de mercadorias para os quais, nessa simulação, não estão inclusos gastos de frete, mão de obra, processamento ou uso de equipamentos, pela alta variação encontrada em função de cada situação. Contudo, para o produtor, os mesmos devem ser incluídos no modelo para que sejam otimizadas também as formas de aquisição ou produção dos alimentos.

Nesse caso, em vez de citar claramente os valores de custo em reais (R\$), os autores utilizaram o termo "unidade monetária" (\$) para representá-los e enfatizar que os resultados apresentados são provenientes de um exemplo numérico.

Tabela 3: Avaliação químico-bromatológica de alimentos indicados por Rodrigues (2009) e NRC (1996).

Produto	Alfafa (feno)	Arroz integral (farelo)	Aveia preta*	Azevém*	Cana-de-açúcar (bagaço)	Cornichão
Custo [\$/kg]	1.500	0.260	0.020	0.020	0.075	0.020
Matéria Seca [%]	85.00	89.14	16.95	17.24	91.95	17.65
NDT [% MS]	67.63	74.93	64.6	66.58	46.64	67.20
EM [Mcal/kg]	2.45	2.71	2.34	2.41	1.69	2.43
PB [% MS]	22.39	13.11	9.73	11.16	1.36	19.73
Ca [g/kg]	1.14	0.10	0.31	0.42	0.00	0.69
P [g/kg]	0.45	10.00	0.26	0.30	0.00	0.26
FDN [% MS]	41.12	35.66	56.73	53.45	89.82	53.16
FDA [% MS]	28.87	18.45	33.20	30.37	58.86	29.48

Tabela 4: Avaliação químico-bromatológica de alimentos indicados por Rodrigues (2009) e NRC (1996).

Produto	Milho** (farelo)	Milho (Silagem)	Soja (farelo)	Sorgo (grão)**	Trevo branco	Trigo (Farelo)
Custo [\$/kg]	0.440	0.065	0.600	0.375	0.020	0.340
Matéria Seca [%]	88.20	22.85	89.66	90.00	11.49	89.87
NDT [% MS]	89.00	60.84	83.73	82.00	68.14	79.99
EM [Mcal/kg]	3.22	2.20	3.03	2.96	2.46	2.89
PB [% MS]	66.30	9.58	58.62	12.60	21.09	17.13
Ca [g/kg]	0.07	0.27	0.28	0.04	1.30	1.06
P [g/kg]	0.61	0.20	0.63	0.34	0.39	8.60
FDN [% MS]	8.90	66.40	9.11	16.10	36.80	39.88
FDA [% MS]	7.90	38.57	5.87	6.38	28.15	11.22

Resultado numérico

Após a avaliação computacional do modelo e restrições numéricas, a solução ótima indicada na saída do programa, na forma ilustrada da Figura 6, está apresentada a seguir na Tabela 5, em kg de produto.

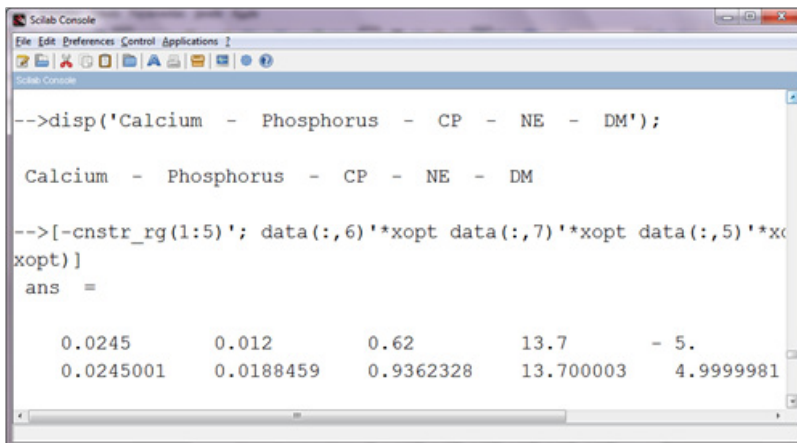


Figura 6: Tela com a saída dos resultados no Scilab.

Pelo resultado do algoritmo de Karmarkar, dentre os 15 produtos listados como disponíveis para a formulação da dieta, foram selecionados cinco, em uma proporção de 69% de cornichão, 24,8% de grãos de sorgo e o restante de Suplemento 2 e farelos de arroz integral e milho, para o início da engorda do animal de 250 kg, a um custo de 1,77 unidades monetárias por dia. Pode-se interpretá-lo como a melhor relação entre elementos nutricionais e gasto, que garanta o mínimo necessário ao desenvolvimento do bovino. Mas se deve esperar que, nas flutuações diárias,

semanais ou mensais dos preços e tipos de alimentos disponíveis, essa formulação/ custo também varie. Portanto, há situações nas quais são requeridas frequentes atualizações do resultado da otimização.

Ao avaliar as outras faixas, verifica-se que quanto mais se desenvolve em peso, a dieta varia aumentando a quantidade de cornichão e sorgo (grão) e reduzindo os outros componentes, de arroz e milho, este último sendo eliminado da formulação no peso de 362,9 kg, conforme ilustrado na Figura 7. Em outras palavras, o custo dos farelos de arroz e milho em relação à qualidade nutricional e associado às restrições do modelo levaram a um resultado que reduz a presença desses alimentos. Essa capacidade de cruzar simultaneamente as informações de inúmeras variáveis, limitando diversas delas ou correlacionando-as, é o que diferencia o método das formas de trabalho manuais, estas muitas vezes empregadas no campo e gerando gastos a mais.

Tabela 5: Resultado das simulações com 15 produtos alimentícios.

	Faixas de peso					
[kg]	250,0	272,2	294,8	317,5	340,2	362,9
Alfafa (feno)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Arroz integral (farelo)	0,19	0,18	0,18	0,18	0,17	0,16
Aveia preta	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Azevém	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Cana-de-açúcar (bagaço)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Cornichão	8,64	9,41	10,19	10,98	11,77	12,55
Milho (farelo)	0,45	0,32	0,24	0,15	0,09	0,00
Milho (Silagem)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Soja (farelo)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Sorgo (grão)	3,10	3,57	4,00	4,43	4,84	5,28
Trevo branco	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Trigo (Farelo)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Suplemento 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Suplemento 2	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
Suplemento 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Massa do alimento [kg]	12,50	13,61	14,74	15,86	16,99	18,11
Custo Diário [\$]	1,77	1,91	2,05	2,19	2,33	2,46

Essa relação resulta em um custo médio, dentre as seis faixas de peso, de \$2,12 por dia/animal, com ganho diário esperado de 1,2 kg entre 250 kg e 453,6 kg, de acordo com a previsão no NRC (1996). Portanto, simplificadamente, se o novilho ganhasse 1,0 kg por dia, em 200 dias, seriam gastos em torno de \$430,00/ animal para sua alimentação. Essa informação, dentre as várias possibilidades de uso da otimização, seria a de predizer a rentabilidade futura por adotar uma determinada estratégia de manejo, ou seja, estimar antes mesmo de produzir qual seria o lucro ao final da produção.

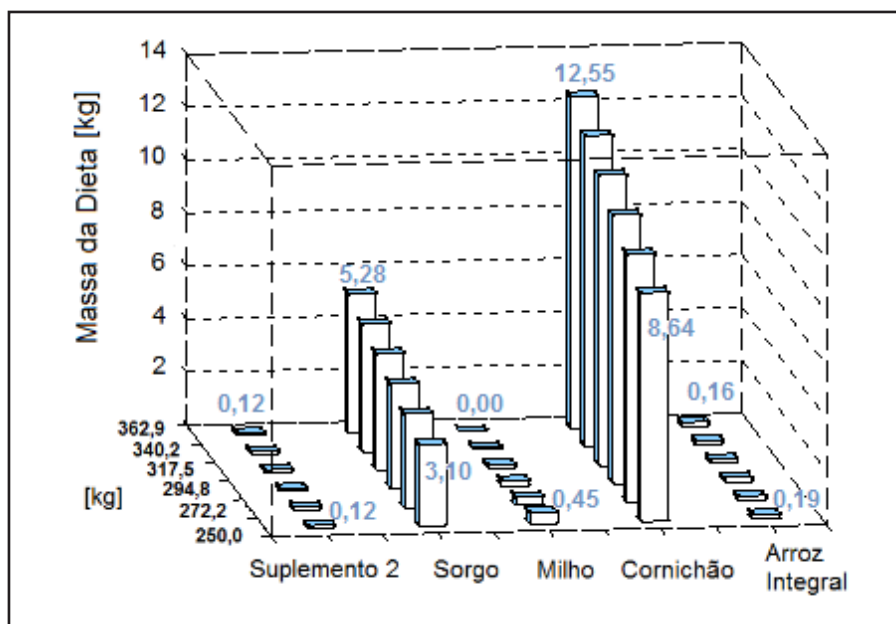


Figura 7: Mudança do percentual dos alimentos em função do aumento do peso.

Cada uma dessas dietas atende às mínimas especificações nutricionais, mas alguns dos parâmetros aparecem em excesso, pois não é possível atingir todos os valores mínimos simultaneamente com os tipos de alimentos disponíveis, por exemplo, na solução ótima obtida na simulação, a quantidade de fósforo e proteína bruta excedem em torno de 35% em relação ao necessário, a todas as faixas de pesos (Tabela 6).

Para qualquer formulação, independente do método, espera-se que existam excedentes de nutrientes ou energia aos mínimos valores exigidos para a manutenção e crescimento do animal.

O que diferencia o procedimento da otimização é que esses excedentes sempre serão o menor possível, pois representam custos adicionais, cujo algoritmo buscará minimizar.

A solução da otimização é livre quanto aos possíveis valores máximos de Ca, P, PB e EM, colocados nas inequações das restrições desse exemplo, mas algumas relações de proporção devem ser seguidas, a exemplo de 1,3:1,0 a 2,0:1,0 na razão entre Ca e P. De modo que se incluiu a seguinte restrição:

$$P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \dots + P_N \cdot x_N \leq \frac{Ca_{min} \cdot MS_{min}}{1,3}$$

Para limitar o máximo valor de fósforo em função da quantidade de cálcio.
Os resultados numéricos obtidos na simulação (Tabela 6), com essa restrição da quantidade de fósforo, tendem ao limite inferior da razão, em 1,32:1,00.

Tabela 6: Resultado da composição da dieta formulada pela PO.

250,0 kg	Ca [kg]	P [kg]	PB [kg]	EM [Mcal]	MS [kg]
Necessário	0,025	0,012	0,620	13,700	5,000
Atendido	0,025	0,019	0,936	13,700	5,000
Excedente [%]	0,0	36,8	36,8	0,0	0,0
272,2 kg	Ca [kg]	P [kg]	PB [kg]	EM [Mcal]	MS [kg]
Necessário	0,025	0,013	0,648	14,917	5,444
Atendido	0,025	0,019	0,943	14,917	5,444
Excedente [%]	0,0	31,6	31,3	0,0	0,0
294,8 kg	Ca [kg]	P [kg]	PB [kg]	EM [Mcal]	MS [kg]
Necessário	0,025	0,012	0,678	16,155	5,896
Atendido	0,025	0,019	0,969	16,155	5,896
Excedente [%]	0,0	36,8	30,0	0,0	0,0

317,5 kg	Ca [kg]	P [kg]	PB [kg]	EM [Mcal]	MS [kg]
Necessário	0,025	0,013	0,692	17,399	6,350
Atendido	0,025	0,019	0,995	17,399	6,350
Excedente [%]	0,0	31,6	30,5	0,0	0,0

340,2 kg	Ca [kg]	P [kg]	PB [kg]	EM [Mcal]	MS [kg]
Necessário	0,025	0,013	0,700	18,643	6,804
Atendido	0,025	0,019	1,031	18,643	6,804
Excedente [%]	0,0	31,6	32,1	0,0	0,0

362,9 kg	Ca [kg]	P [kg]	PB [kg]	EM [Mcal]	MS [kg]
Necessário	0,025	0,013	0,711	19,887	7,258
Atendido	0,025	0,019	1,055	19,887	7,258
Excedente [%]	0,0	31,6	32,6	0,0	0,0

Em resumo, esse é um processo para responder à questão colocada inicialmente: "qual é a quantidade ideal de cada produto disponível, cujo composto final atenderia à necessidade diária do animal e com menor custo possível?. Como uma resposta direta, dada na saída da otimização, seria: "Deve-se alimentar as novilhas com cornichão, farelos de arroz integral e milho, grão de sorgo e um suplemento comercial (número 2), nas proporções indicadas anteriormente para cada faixa de peso". Fazendo isso, garante-se que as necessidades nutricionais sejam supridas, tal como tem-se a mais barata formulação para atendê-las.

Conclusão

O presente documento coloca, de forma simplificada, o processo de modelagem matemática e da metodologia de solução pela programação linear, focando a formulação nutricional de bovinos. Essa é uma maneira de trabalhar com a otimização para atingir determinadas metas com o menor gasto possível e que, neste caso, é o de atender aos requisitos nutricionais pelo menor custo no conjunto de produtos alimentícios. A sua viabilidade prática depende de diversos fatores, como acesso às informações da composição químico-bromatológica dos alimentos e conhecimento da alimentação de ruminantes. Este último é requerido na definição do modelo matemático, para que haja representabilidade do fenômeno real, e na interpretação da saída do programa.

Os exemplos mostrados aqui não contemplaram outras variáveis do processo, como os custos relacionados ao transporte, mão de obra, máquinas e equipamentos, etc., mas que se incluídos nos cálculos abrangeriam de forma mais fiel a realidade do produtor. Uma vez que o modelo é montado e ajustado à realidade da produção, ele se torna uma ferramenta muito poderosa no gerenciamento e tomada de decisão, podendo, inclusive, prever ganhos ou perdas ao adotar um tipo de manejo antes mesmo de utilizá-lo.

Apesar de este trabalho estar voltado para a alimentação de animais, chama-se à atenção que uma estrutura similar poderia

ser criada (e é usada em diversas situações) na otimização do uso de fertilizantes, para atender aos requisitos da planta com menor custo possível, e de agrotóxicos, para minimizar a quantidade aplicada com menor gasto e maior efetividade sobre as pragas. É claro que, atualmente, existem modelagens que consideram todos os tópicos em uma única formulação matemática, possibilitando trabalhar em uma condição ótima do sistema de produção, da pastagem [escolha do(s) tipo(s) de forrageiras, fertilização e irrigação] à nutrição animal (tipos e quantidades de alimentos suplementares à pastagem).

Assim, esse documento teve o intuito de trazer ao leitor uma forma de pensamento voltada à racionalização do uso dos recursos, embasada em técnicas tradicionais da matemática. Mas, como colocado na introdução, a aplicação desses métodos depende de pessoas com competência em modelagem matemática e programação computacional, mostrando o quão importante é a presença de profissionais das ciências exatas na área das ciências agrícolas.

Referências

DANTZIG, G. B. Application of the Simplex method to a transportation problem. In: KOOPMANS, T. C. **Analysis of production and allocation**. New York: J. Wiley, 1951. p. 359-373.

DANTZIG, G. B., THAPA, M. N. **Linear programming: theory and extensions**. New York: Springer, 1997. 457 p.

DARMON, N., DARMON, M., FERGUSON, E. Identification of nutritionally adequate mixtures of vegetable oils by linear programming. **Journal of Human Nutrition and Dietetics**, Oxford, v. 19 , n.1, p. 59-69, 2006.

DIKIN, I. I. Iterative solution of problems of linear and quadratic programming. **Soviet Mathematics Doklady**, Providence, 8, p. 674-675 , 1967.

ESTEVES, S. N., BARBOSA, P. F., BARBOSA, R.T. **Intensificação da bovinocultura de corte: estratégias de alimentação e terminação**. São Carlos: Embrapa-CPPSE, 1997. 75 p. (Embrapa-CPPSE. Documentos, 27).

FACTORI, M. A., COSTA, C., MEIRELLES, P.R.L., PARIZ, C.M. **Módulos mínimos de produção: custos da produção de leite em pasto**. Disponível em: <<http://www.milkpoint.com.br/artigos-tecnicos/pastagens/>> . Acesso em: 30 Jun. 2011.

FERGUSON, E.L., DARMON, N., BRIEND, A., PREMACHANDRA, I.M. Food-based dietary guidelines can be developed and tested using linear programming analysis. **The Journal of Nutrition**, Bethesda, v. 134 n. 4, p. 951-957, 2004.

GALYEAN, M. L., ABNEY, C. S. Assessing roughage value in diets of high-producing cattle. In: ANNUAL SOUTHWEST NUTRITION & MANAGEMENT CONFERENCE, 21., 2006, Tempe. **Proceedings...** Tempe: The University of Arizona, 2006. p. 127-144.

GIORDANO, F. R., FOX, W. P., HORTON, S. B., WEIR, M. D. **A first course in mathematical modeling**. 4. ed. Belmont: Cengage Learning, 2009. 620 p.

HAYTOWITZ, D.B., LEMAR, L.E., PEHRSSON, P.R. USDA's nutrient databank system – a tool for handling data from diverse sources. **Journal of Food Composition and Analysis**, New York, v. 22, p. 433-441, 2009.

ISLABÃO, N. **Manual de cálculo de rações para animais domésticos**. 4. ed. Porto Alegre: Sagra, 1984. 177 p.

KARMARKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. **Combinatorica**, Berlin, v. 4 , n. 4, p. 373-395 , 1984.

KHACHIAN, L.G. A polynomial algorithm in linear programming. **Soviet Mathematics Doklady**, Providence, v. 20, p. 191-194, 1979.

LISITA, F.O., TOMICH, T.R., CAMPOLIN, A.I., FEIDEN, A., CONCEIÇÃO, C.A., NASCIMENTO, V.R., TRINDADE, L.L. **Recursos forrageiros regionais conservados como feno para a alimentação de bovinos na região de Corumbá, MS**. Corumbá: Embrapa Pantanal, 2009. 5 p. (Embrapa Pantanal. Circular técnica, 87).

MARQUES, J.B.B., COUTO, M.R. **Ganho de peso bovino em resteva de arroz irrigado na safra de 2009/ 2010 na Embrapa Pecuária Sul**. Bagé: Embrapa Pecuária Sul, 2010. 13 p. (Embrapa Pecuária Sul. Documentos, 102).

MESSIAS, E.A.C., TOMICH, T.R., SERENO, J.R.B. **Silagens do terço superior de capim-elefante com adição de casca de soja**. Corumbá: Embrapa Pantanal, 2006. 4 p. (Embrapa Pantanal. Circular Técnica, 67).

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (NRC). **Nutrient requirements of beef cattle**. 7. ed. Washington: National Academy Press, 1996. 232 p.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL. **Nutrient requirements of dairy cattle**. 7. ed. Washington: National Academy Press, 2001. 381p.

OISHI, K., KUMAGAI, H., HIROOKA, H. Application of the modified feed formulation to optimize economic and environmental criteria in beef cattle fattening system with food by-products. **Animal Feed Science and Technology**, Amsterdam, v. 165, p. 38-50, 2011.

PEREIRA, L. G. R., AZEVEDO, J. ^a G., PINA, D. S., BRANDÃO, L. G. N., ARAÚJO, G. G. L., VOLTOLINI, T. V. **Aproveitamento dos coprodutos da agroindústria processadora de suco e polpa de frutas para alimentação de ruminantes**. Petrolina: Embrapa Semi-Árido, 2009. 30 p. (Embrapa Semi-Árido. Documentos, 220).

RODRIGUES, R. C. **Avaliação químico-bromatológica de alimentos produzidos em Terras Baixas para nutrição animal**. Pelotas: Embrapa Clima Temperado, 2009. 28 p. (Embrapa Clima Temperado. Documentos, 270).

SAHMAN, M.A., CUNKAS, M., INAL, S., INAL, F., COSCUN, B., TASKIRAN, U. Cost optimization of feed mixes by genetic algorithms. **Advances in Engineering Software**, Amsterdam, v. 40, p. 965-974, 2009.

SAUN, R.J.V. Nutrient requirements of South American camelids: a factorial approach. **Small Ruminant Research**, Amsterdam, v. 61, p. 165-186, 2006.

SCHRIJVER, A. The new linear programming method of Karmarkar. **CWI Newsletter**, Amsterdam, v. 8, p. 2-14, 1985.

SOARES, J.P.G, DERESZ, F., AROEIRA, L.J.M., SALMAN, A.K.D. **Efeito da suplementação de concentrado sobre o consumo de capim-elefante picado, por vacas mestiças.** Porto Velho: Embrapa Rondônia, 2009. 26 p. (Embrapa Rondônia. Boletim de Pesquisa e Desenvolvimento, 60).

SU.VI.MAX/ INSERM ouvrage collectif. **Table de composition des aliments.** Paris: Economica Editions, 2006. 181 p.

TODD, M. J. The many facets of linear programming. **Mathematical Programming**, Berlin, v. 91, n. 3, p. 417-436, 2002.

TOMICH, T. R., PEREIRA, L. G. R., GONÇALVES, L. C. **Alimentos volumosos para o período seco – I: silagem de girassol.** Corumbá: Embrapa Pantanal, 2004. 30 p. (Embrapa Pantanal. Documentos, 72).